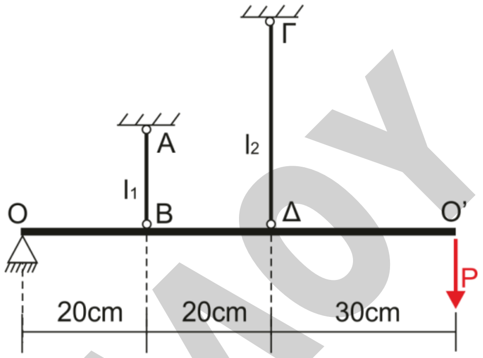
Ε.Μ.Π. - ΤΜΗΜΑ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ-Ι-04/07/2008

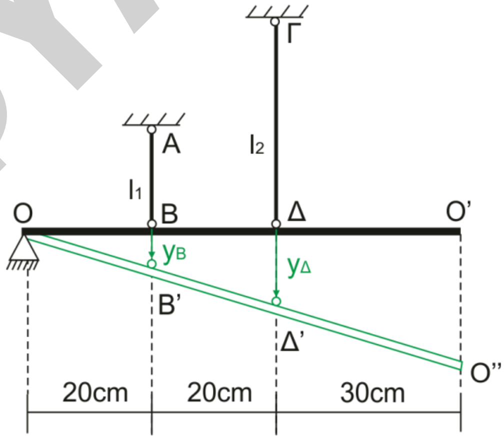
ΘΕΜΑ 1ο

Οριζόντια απαραμόρφωτη ράβδος ΟΟ' (θεωρείται αβαρής) στηρίζεται με άρθρωση στο σημείο Ο και κρέμεται όπως φαίνεται στο σχήμα από δύο σύρματα ΑΒ, ΓΔ, από υλικό με διατομή αντίστοιχα $A_1=1cm^2$, $A_2=2cm^2$ και μήκη $l_1=40cm$ και $l_2=80cm$. Η τάση διαρροής-θραύσης του υλικού είναι $\sigma_\Delta=1500N/cm^2$. Στο σημείο Ο' εφαρμόζεται ένα φορτίο P το οποίο αυξάνει σταδιακά την τιμή από μηδενική τιμή. Να υπολογίσετε την τιμή του φορτίου τη στιγμή που θα έχουμε ολική θραύση (θραύση και στα δύο σύρματα).



Λύση:

Κατασκευάζω την παραμορφωμένη κατάσταση του σύστηματος. Έστω ότι ο κόμβος Β μετακινείται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_B και ο κόμβος Δ ομοίως κατά y_Δ.



Ράβδος (1)

$\Delta l_1=\frac{S_1 l_1}{EA_1}$ (1)

$\Delta l_1=y_B$ (3)

Ράβδος (2)

$\Delta l_2=\frac{S_2 l_2}{EA_2}$ (2)

$\Delta l_2=y_\Delta$ (4)

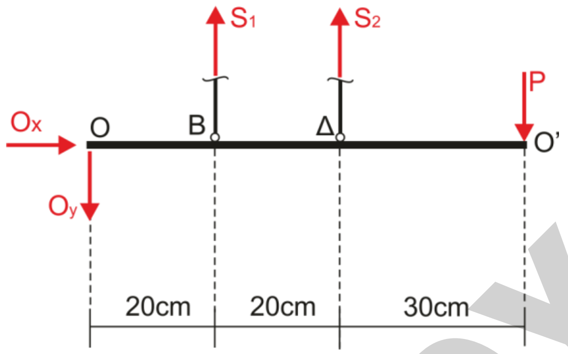
Λόγω όμοιων τριγώνων ισχύει:

$$\frac{y_B}{y_\Delta}=\frac{OB}{O\Delta}\Rightarrow\frac{y_B}{y_\Delta}=\frac{20}{40}\Rightarrow y_B=0{,}5y_\Delta\xRightarrow{(3),(4)}\Delta l_1=0{,}5\Delta l_2 \quad (5)$$

Με την προυπόθεση ότι βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή η (5) γίνεται:

$$\text{Η } (5)\xRightarrow{(1),(2)}\frac{S_1 l_1}{EA_1}=0{,}5\frac{S_2 l_2}{EA_2}\Rightarrow\frac{S_1 l_1}{EA_1}=\frac{S_2 l_2}{EA_2}\Rightarrow\frac{S_1 0{,}4}{1*10^{-4}}=\frac{S_2 0{,}8*0{,}5}{2*10^{-4}}\Rightarrow S_1=0{,}5S_2 \quad (6)$$

<u>Κατασκευάζω Δ.Ε.Σ. της δοκού ΟΟ'</u>



$\Sigma M_O=0 \Rightarrow 0{,}2S_1+0{,}4S_2=0{,}7P$ ⑦

Η ⑦ $\overset{⑥}{\Rightarrow}$ $0{,}2*0{,}5S_2+0{,}4S_2=0{,}7P \Rightarrow S_2=1{,}4P$ και $S_1=0{,}7P$

Βρίσκω τις τάσεις των ράβδων:

- $\sigma_1=\frac{S_1}{A_1}=\frac{0{,}7P}{A_1}=\frac{0{,}7P}{1*10^{-4}}=0{,}7*10^4P\ \ N/m^2$
- $\sigma_2=\frac{S_2}{A_2}=\frac{1{,}4P}{A_2}=\frac{1{,}4P}{2*10^{-4}}=0{,}7*10^4P\ \ N/m^2$

$\Rightarrow \sigma_2=\sigma_1 \rightarrow$ άρα διαρρέουν συγχρόνως

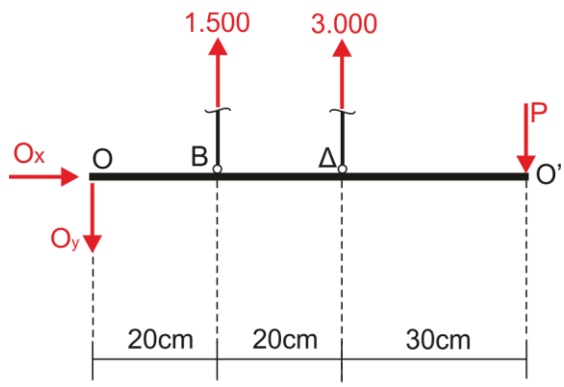
Εφόσον διαρρέουν συγχρόνως από υπερστατικό μία φορά γίνεται κινητό άρα το φορτίο διαρροής του συστήματος ταυτίζεται με το φορτίο κατάρρευσης.

Βρίσκω τις δυνάμεις διαρροής των ράβδων:

- $\sigma_\Delta^{(1)}=\frac{S_1^\Delta}{A_1} \Rightarrow 1500=\frac{S_1^\Delta}{1} \Rightarrow S_1^\Delta=1500N$
- $\sigma_\Delta^{(2)}=\frac{S_2^\Delta}{A_2} \Rightarrow 1500=\frac{S_2^\Delta}{2} \Rightarrow S_2^\Delta=3000N$

<u>ΕΥΡΕΣΗ ΦΟΡΤΙΟΥ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ</u>

Κάνω εκ νέου Δ.Ε.Σ. της δοκού ΟΟ'.

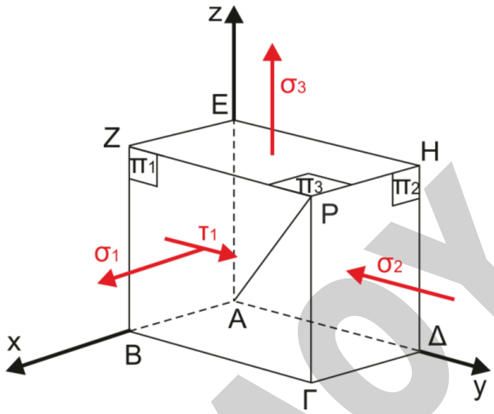


$\Sigma M_O=0 \Rightarrow 1500*0{,}2+3000*0{,}4=0{,}7P_\Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow P_\Delta=2.142{,}85N=2{,}143kN$

ΘΕΜΑ 2ο-ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι-04/07/2008-Ε.Μ.Π.-ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

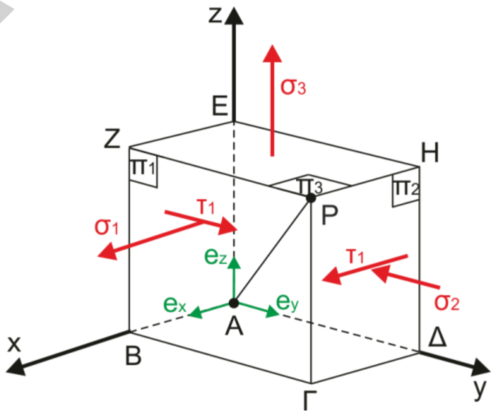
Η εντατική κατάσταση σε ένα σημείο Ρ καταπονούμενου σώματος καθορίζεται από τις τάσεις που εφαρμόζονται στα τρία, ανά δύο κάθετα, επίπεδα Π_1, Π_2, Π_3 που διέρχονται από το Ρ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι φορές των τάσεων φαίνονται στο σχήμα και τα μέτρα τους είναι σ_1=60MPa, τ_1=30MPa στο επίπεδο Π_1, σ_2=90MPa στο επίπεδο Π_2 και σ_3=30MPa στο επίπεδο Π_3.



i. Σχεδιάστε στα επίπεδα Π_1,Π_2,Π_3 όλες τις εφαρμοζόμενες τάσεις (που πιθανόν έχουν παραληφθεί στο σχήμα).
ii. Δώστε τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων στο Ρ ως προς το σύστημα Axyz.
iii. Υπολογίστε τις κύριες τάσεις και το κύριο σύστημα αξόνων.
iv. Υπολογίστε τις μέγιστες διατμητικές τάσεις και τα επίπεδα στα οποία εμφανίζονται.
v. Γνωρίζοντας ότι ΑΒ:ΑΔ:ΑΕ=1:2:2 να υπολογίσετε την ορθή και τη διατμητική τάση που εφαρμόζονται στο επίπεδο που είναι κάθετο στην διαγώνιο ΑΡ.

Λύση:

i. Η μόνη τάση που πρέπει να σχεδιαστεί είναι η διατμητική τάση στο επίπεδο Π_2 και η οποία έχει διεύθυνση στον άξονα των x(σ_{yx}). Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η σχεδίαση όλων των τάσεων που ασκούνται στο σημείο Ρ.



ii. Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης ο τανυστής των τάσεων στο σύστημα Oxyz θα είναι:

$$\tilde{\sigma}_{0xyz}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+60 & +30 & 0\\ +30 & -90 & 0\\ 0 & 0 & +30\end{bmatrix}\text{MPa}$$

iii. Παρατηρώ από τον παραπάνω τανυστή ότι ο άξονας z είναι κύριος άξονας αφού $\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0$ και αρα το επίπεδο ΖΕΗΡ είναι κύριο. Άρα στην ουσία πρέπει να βρω τους άλλους δύο κύριους άξονες. Έτσι το πρόβλημα μου μετασχηματίζεται από πρόβλημα τριαξονικής έντασης σε πρόβλημα διαξονικής.

Για το επίπεδο Oyx ισχύει:

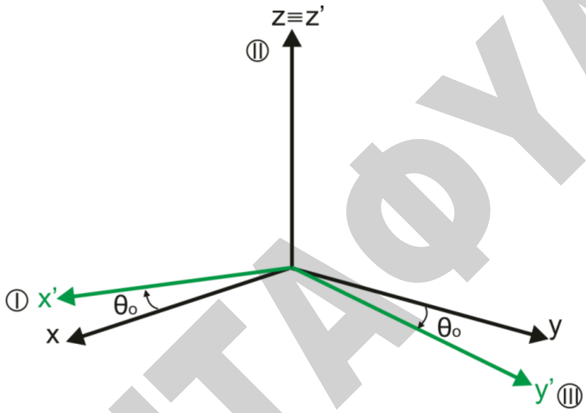
- $\tan 2\theta_o = \frac{2*30}{-90-60} \Rightarrow 2\theta_o = -21{,}801^0 \Rightarrow \theta_o = -10{,}90^0$
- $\sigma_{max,min} = \frac{60-90}{2} \pm \sqrt{(\frac{-90-60}{2})^2 + 30^2} \Rightarrow \sigma_{max} = 65{,}777MPa$

$\sigma_{min} = -95{,}777MPa$

Άρα οι κύριες τάσεις θα είναι:

$\sigma_I = 65{,}777MPa < \sigma_{II} = 30MPa < \sigma_{III} = -95{,}777MPa$

Η διεύθυνση των κύριων αξόνων φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



iv. Οι μέγιστες διατμητικές τάσεις εμφανίζονται σε επίπεδα που διχοτομούν τις ορθές γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο τα κύρια επίπεδα. Οι τιμές τους είναι:

- $\tau_I = +\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = +\frac{65{,}777-(-95{,}777)}{2} = +80{,}777MPa$
- $\tau_{II} = +\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} = +\frac{30-(-95{,}777)}{2} = +62{,}889MPa$
- $\tau_{III} = +\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = +\frac{65{,}777-30}{2} = +17{,}889MPa$

v. Σε πρώτη φάση πρέπει να βρω το μοναδιαίο διάνυσμα που βρίσκεται πάνω στην διεύθυνση της ευθείας ΑΡ. Από την εκφώνηση ένα τυχαίο διάνυσμα πάνω στην διεύθυνση της ΑΡ είναι:

$\mathbf{\alpha} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$

το μέτρο του διανύσματος **α** είναι $|\mathbf{\alpha}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3m$.

Άρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα πάνω στην διεύθυνση της ΑΡ θα είναι:

$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{n}|\boldsymbol{\alpha}| \Rightarrow \mathbf{n}=\frac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|} \Rightarrow \mathbf{n}=\frac{1ex+2ey+2ez}{3} \Rightarrow \mathbf{n}=0{,}333\mathbf{e}_x+0{,}667\mathbf{e}_y+0{,}667\mathbf{e}_z$

Οι συνιστώσες του διανύσματος της τάσης **t** που ασκείται στο επίπεδο που έχει κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα **n** είναι:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{t}_x\\ \mathbf{t}_y\\ \mathbf{t}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{t}_x\\ \mathbf{t}_y\\ \mathbf{t}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+60 & +30 & 0\\ +30 & -90 & 0\\ 0 & 0 & +30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}333\\ 0{,}667\\ 0{,}667\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}40\\ -50\\ 20\end{bmatrix}\text{MPa}$$

- <u>Υπολογισμός ορθής τάσης</u>

προβ$\mathbf{t}_n$ =40*0,333-50*0,667+20*0,667=-6,667MPa (άρα θλιπτική)

Άρα το διάνυσμα της ορθής τάσης θα είναι:

$\boldsymbol{\sigma}=-6{,}667(0{,}333\mathbf{e}_x+0{,}667\mathbf{e}_y+0{,}667\mathbf{e}_z) \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}=-2{,}22\mathbf{e}_x+4{,}45\mathbf{e}_y+4{,}45\mathbf{e}_z$

- <u>Υπολογισμός διατμητικής τάσης</u>

Η διατμητική τάση θα είναι $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{t}-\boldsymbol{\sigma}\Rightarrow$

$\boldsymbol{\tau}=(40+2{,}22)\,\mathbf{e}_x+(-50-4{,}45)\,\mathbf{e}_y+(20-4{,}45)\,\mathbf{e}_z \Rightarrow \boldsymbol{\tau}=42{,}22\mathbf{e}_x-54{,}45\mathbf{e}_y+15{,}55\,\mathbf{e}_z$

Το μέτρο της θα είναι: $\sqrt{42{,}22^2+(-54{,}45)^2+15{,}55^2}$ =70,63 MPa

ΘΕΜΑ 3ο-ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι-04/07/2008-Ε.Μ.Π.-ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Σε μία επίπεδη εντατική κατάσταση οι τάσεις έχουν τις εξής τιμές: σ_{xx}=3,75at, σ_{xy}=1,25at και σ_{yy}=2,165at

- **i.** Να κατασκευάσετε τον κύκλο του Mohr
- **ii.** Να υπολογίσετε γραφικά τις κύριες τάσεις και το κύριο σύστημα. Ποια γνωστή καταπόνηση παριστάνει ο συγκεκριμένος κύκλος του Mohr;

Λύση:

i. Δίνεται ότι ο τανυστής των τάσεων είναι: $\tilde{\sigma}_{oxy}=\begin{bmatrix}3{,}75 & 1{,}25\\ 1{,}25 & 2{,}165\end{bmatrix}$ [at]

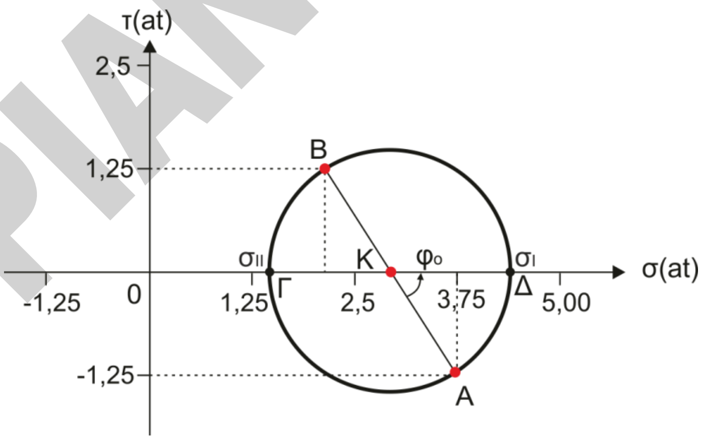
Ξεκινάμε με τα σημεία Α και Β που έχουν συντεταγμένες:

Α(3,75, -1,25)

Β(2,165, +1,25)

Φέρνω την ευθεία ΑΒ. Αυτή τέμνει τον άξονα των ορθών τάσεων στο Κ, το οποίο είναι και το κέντρο του κύκλου. Σχεδιάζω κύκλο με ακτίνα ΚΒ. Ο κύκλος τέμνει τον άξονα των ορθών τάσεων σε δύο σημεία (Γ,Δ). Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις τάσεις των κύριων επιπέδων. Μετρώντας τις αποστάσεις ΟΓ και ΟΔ έχουμε τις σ_{II} και σ_{I} αντίστοιχα.

$\sigma_{II}\simeq$1,45at και $\sigma_{I}\simeq$4,40at



Η διεύθυνση των κύριων τάσεων βρίσκεται αν στρέψουμε δεξιόστροφα το αρχικό σύστημα Oxy κατά 0,5φ_0 (όπου φ_0 βλέπε άνωθεν σχήμα η οποία μετριέται με μοιρογνωμόνιο είτε υπολογίζεται από τα αποτελέσματα που έχουμε εξάγει.

ii. Ο παραπάνω κύκλος παριστάνει τον διαξονικό εφελκυσμό.