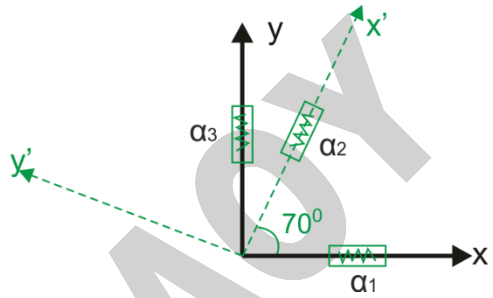
Ε.Μ.Π. - ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ - ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ - 16/12/2011

Θέμα 1ο

Στο επίπεδο σώμα του σχήματος έχουν επικολληθεί τρία ηλεκτρομ/ρα όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι ενδείξεις είναι $\alpha_1=3\mu$, $\alpha_2=1\mu$, και $\alpha_3=2\mu$. Να υπολογιστούν:



α. η ελάχιστη μεταβολή μήκους που μπορεί να υποστεί ένα αρχικό μήκος L=10cm επί της επιφάνειας του σώματος.

β. σε ποια διεύθυνση ως προς του άξονα Ox, θα συμβεί;

Λύση:

Σύμφωνα με την εκφώνηση θα έχω:

Ο τανυστής παρ/σεων στο σύστημα Oxy: $\tilde{\varepsilon}_{oxy}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & 2\end{bmatrix}\mu$

Ο τανυστής παρ/σεων στο σύστημα Ox'y': $\tilde{\varepsilon}_{ox'y'}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'}\\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'y'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_{x'y'}\\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'y'}\end{bmatrix}\mu$

Από το σύστημα Oxy στρέφομαι αριστερόστροφα κατά 70^0 και μεταφέρομαι στο σύστημα Ox'y'. Χρησιμοποιώ την εξίσωση μετασχηματισμού:

$\varepsilon_{x'x}=\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2}+\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\cos2\theta+\varepsilon_{xy}\sin2\theta\Rightarrow1\mu=2{,}5\mu+0{,}5(-0{,}766\mu)+0{,}6428\varepsilon_{xy}\Rightarrow$

$\underline{\varepsilon_{xy}=-1{,}7377\mu}$

α. Η ελάχιστη μεταβολή μήκους θα παρουσιάζεται στον κύριο άξονα 2. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τους κύριους άξονες.

$\tan2\theta_0=\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}\Rightarrow \tan2\theta_0=\frac{2(-1{,}7377\mu)}{(3-2)\mu}\Rightarrow\theta_0=-36{,}973^0$

$\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+4\varepsilon_{xy}{}^2}\Rightarrow\varepsilon_2=\frac{3+2}{2}\mu-\frac{1}{2}\sqrt{(3+2)^2\mu^2+4(-1{,}7377)^2\mu^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\varepsilon_2=0{,}6918\mu$

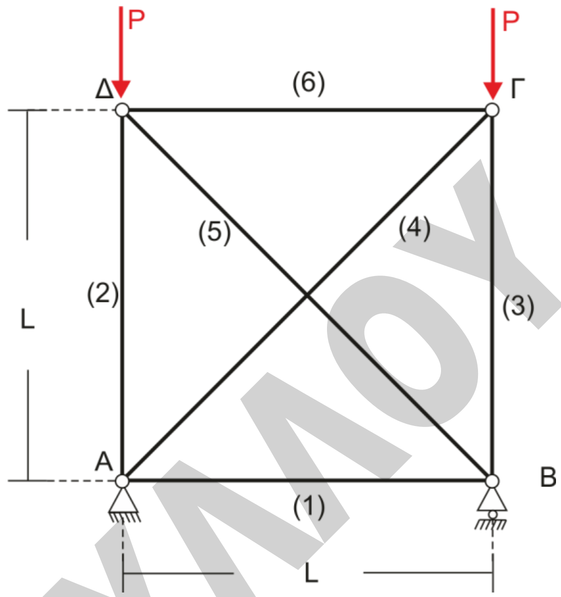
Από τον ορισμό της ανηγμένης παραμόσρφωσης θα έχω:

$\varepsilon=\frac{\Delta l}{l}\Rightarrow\Delta l_{min}=\varepsilon_2 l\Rightarrow\Delta l_{min}=0{,}6918\mu*10\Rightarrow\underline{\Delta l_{min}=6{,}918\mu cm}$

β. Ο ελάχιστος κύριος άξονας βρίσκεται σε γωνία $\varphi=90-36{,}973\Rightarrow\varphi=53{,}027^0$ αριστερόστροφα ως προς τον άξονα x-x.

ΘΕΜΑ2ο-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-16/12/2011-ΠΟΛ.ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ-Ε.Μ.Π.-ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ

Το υπερστατικό τετραγωνικό δικτύωμα του σχήματος φορτίζεται με δυνάμεις P στους κόμβους Γ και Δ. Να υπολογιστούν οι τάσεις (δυνάμεις) των ράβδων. Η εγκάρσια διατομή όλων των ράβδων έχει εμβαδόν (A) κι το υλικό όλων των ράβδων έχει μέτρο ελαστικότητας E.



Λύση:

Ο φορέας είναι μία φορά εσωτερικά υπερ/κός. Βρίσκω τις εξωτερικές αντιδράσεις (βλέπε κάτω σχήμα).

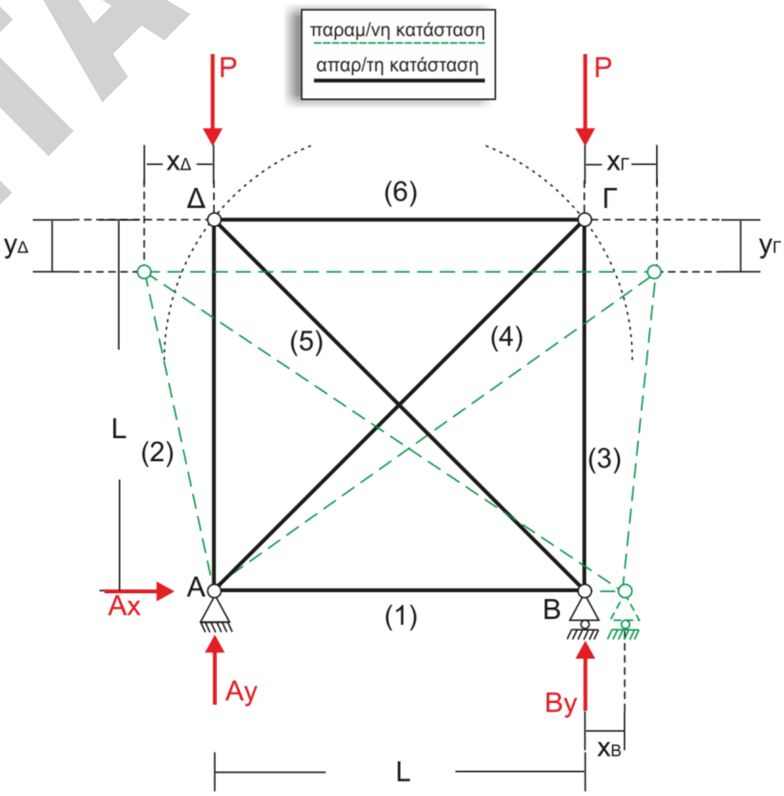
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y+B_y=2P$

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow B_yL-PL=0 \Rightarrow B_y=P$

Άρα και $A_y=P$

Κατασκευάζω την παραμορφωμένη κατάσταση του συστήματος . Έτσι τα σημεία Δ και Γ μετακινούνται οριζόντια κατά x_Δ, x_Γ και κατακόρυφα κατά y_Δ και y_Γ αντίστοιχα. Επίσης το σημείο B μετακινείται μόνο οριζόντια. Λόγω συμμετρικού φορέα με συμμετρική φόρτιση θα αναμένω: $y_\Delta=y_\Gamma$ και $x_\Delta=x_\Gamma - x_B$



<u>Ράβδος 2:</u> $S_2<0$ και $\Delta l_2=y_\Delta$ ①

<u>Ράβδος 3:</u> $S_3<0$ και $\Delta l_3=y_\Gamma$ ②

<u>Ράβδος 1:</u> $S_1>0$ και $\Delta l_1=x_B$ ③

<u>Ράβδος 6:</u> $S_6>0$ και $\Delta l_6=x_\Delta+x_\Gamma$ ④

<u>Ράβδος 4:</u> $S_4>0$ και $\Delta l_4=x_\Gamma\cos45^0-y_\Gamma\sin45^0$ ⑤

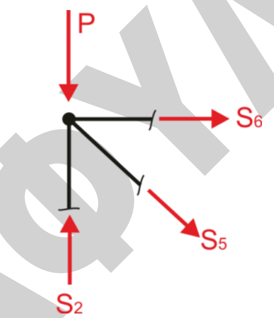
<u>Ράβδος 5:</u> $S_5>0$ και $\Delta l_5=x_\Delta\cos45^0-y_\Delta\sin45^0+y_B\cos45^0$ ⑥

Στη συνέχεια κάνω ισορροπία στους κόμβους Δ,Γ,Β.

<u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡ.ΚΟΜΒΟΥ Δ</u>

$\Sigma F_x=0\Rightarrow S_6+0{,}707S_5=0\Rightarrow \underline{S_6=-0{,}707S_5}$ ⑦

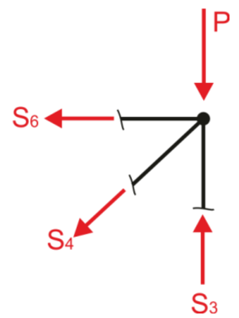
$\Sigma F_y=0\Rightarrow \underline{S_2=S_5 0{,}707+P}$ ⑧



<u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡ.ΚΟΜΒΟΥ Γ</u>

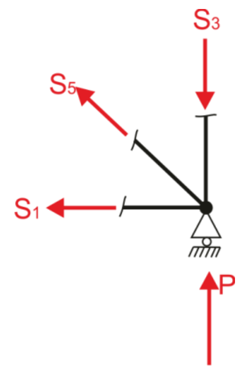
$\Sigma F_x=0\Rightarrow \underline{S_6+0{,}707S_4=0}$ ⑨

$\Sigma F_y=0\Rightarrow \underline{S_3=S_4 0{,}707+P}$ ⑩



<u>ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡ.ΚΟΜΒΟΥ Β</u>

$\Sigma F_x=0\Rightarrow S_1+S_5 0{,}707=0\Rightarrow \underline{S_1=-0{,}707S_5}$ ⑪



Η 6 $\xRightarrow{1-4}$ $\Delta l_5=(\Delta l_6-x_\Gamma)\cos45^0-\Delta l_2\sin45^0+\Delta l_1\cos45^0 \overset{5}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \Delta l_5=(\Delta l_6-\frac{\Delta l_4+y_\Gamma \sin45}{\cos45})\cos45-\Delta l_2\sin45^0+\Delta l_1\cos45^0$

Εφαρμόζοντας τον νόμο του Hooke για κάθε ράβδο η παραπάνω σχέση μετατρέπεται:

$\frac{S_5}{0{,}707}=(S_6-\frac{S_4}{0{,}707^2}-S_3)0{,}707-0{,}707S_2+0{,}707S_1 \xRightarrow{7,8,9,10,11} \underline{S_5=-0{,}29287P}$ (θλιπτική)

Από 7 $\longrightarrow$ $S_6=+0{,}207P$(εφελκυστική)

Από 8 $\longrightarrow$ $S_2=+0{,}7929P$(θλιπτική)

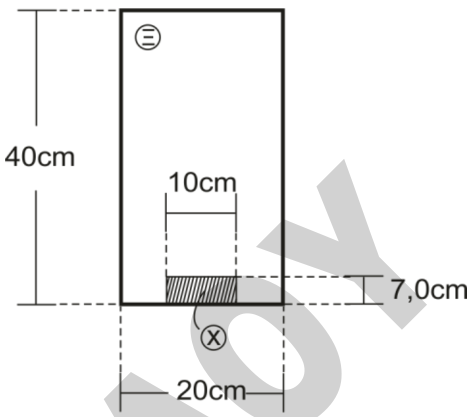
Από 11 $\longrightarrow$ $S_1=+0{,}207P$ (εφελκυστική)

Από 9 $\longrightarrow$ $S_4=-0{,}2928P$ (θλιπτική)

Από 10 $\longrightarrow$ $S_3=+0{,}7929P$(θλιπτική)

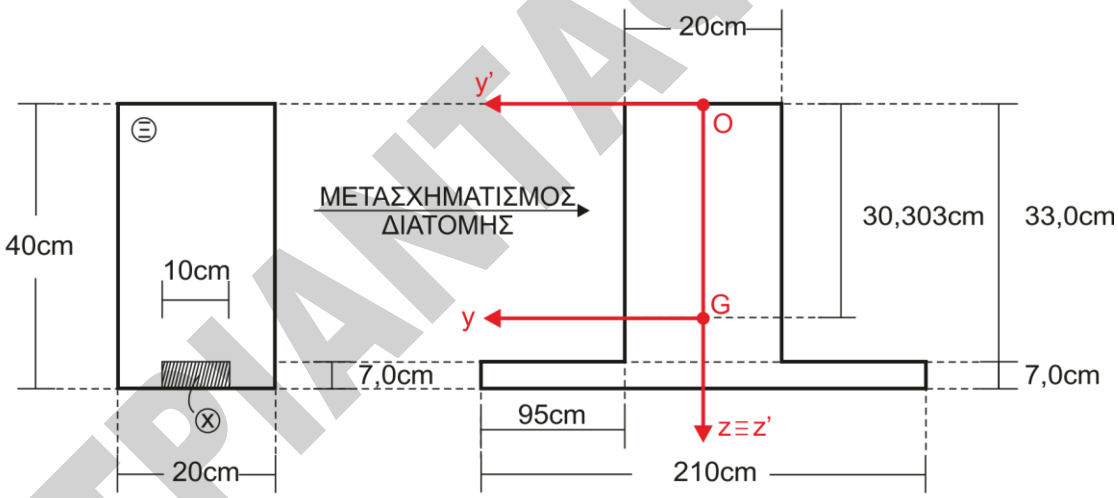
ΘΕΜΑ3ο-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-16/12/2011-ΠΟΛ.ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ-Ε.Μ.Π.-ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ

Ξύλινη δοκός ενισχυμένη με χάλυβα έχει διατομή όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογισθεί η μέγιστη καμπτική ροπή M_y που μπορεί να αναλάβει η διατομή αν η επιτρεπόμενη τάση στον χάλυβα είναι $\sigma_{\varepsilon\pi}^{(x)}$ =90MPa και στο ξύλο $\sigma_{\varepsilon\pi}^{(\xi)}$ =5,0MPa. Δίνεται ο λόγος των μέτρων ελαστικότητας $n=E_X/E_\Xi=20$.



Λύση:

"Μετατρέπω" τον χάλυβα σε ξύλο. Έτσι θα έχω $b_{NEO}=nb=20*10\Rightarrow$ $b_{NEO}=200cm$. Καλύπτω το κενό με b=10cm και το υπόλοιπο(200-10)=190cm το μοιράζω εκατέρωθεν. Τελικά η ιδεατή διατομή μου θα είναι όπως δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Ορίζω βοηθητικό σύστημα αξόνων Oy'z' για να βρω το Κ.Β. της ιδεατής διατομής.



ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΒΑΡΟΥΣ (G)

$$z_G=\frac{z_1'A_1+z_2'A_2}{A_1+A_2}\Rightarrow z_G=\frac{16{,}5(20*33)+\left(33+\frac{7}{2}\right)(7*210)}{(20*33)+(7*210)}\Rightarrow z_G'=30{,}303cm$$

ΕΥΡΕΣΗ ΡΟΠΗΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

$$I_{GG}^{o\lambda}=\frac{33^3*20}{12}+660(30{,}303-16{,}5)^2+\frac{7^3*210}{12}+1470(40-30{,}303-3{,}5)^2\Rightarrow$$

$$I_{GG}^{o\lambda}=248.094{,}683cm^4$$

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΑΣΕΩΝ

Κρίσιμες περιπτώσεις είναι στα δύο άκρα της διατομής.

- $\sigma_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\xi\upsilon\lambda} \leq \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}^{\xi\upsilon\lambda} \Rightarrow \frac{M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}}{I_{GG}^{o\lambda}} z_G^{max} \leq \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}^{\xi\upsilon\lambda} \Rightarrow M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\xi\upsilon\lambda} \leq \frac{\sigma_{\epsilon\pi}^{\xi\upsilon\lambda} I_{GG}^{o\lambda}}{z_G^{max}} \Rightarrow M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\xi\upsilon\lambda} \leq \frac{5*10^{-1}*248.094,683}{30,303}$

  $=4.093,56\text{kNcm}=40,936\text{kNm}$

- $\sigma_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\chi\alpha\lambda} \leq \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}^{\chi\alpha\lambda} \Rightarrow \frac{M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}}{I_{GG}^{o\lambda}} z_G^{max} n \leq \sigma_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}^{\chi\alpha\lambda} \Rightarrow M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\chi\alpha\lambda} \leq \frac{\sigma_{\epsilon\pi}^{XA\Lambda} I_{GG}^{o\lambda}}{z_G^{max} n} \Rightarrow$

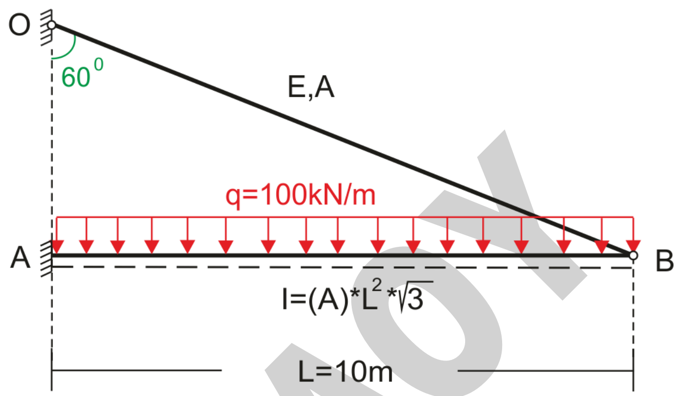
  $\Rightarrow M_{\alpha\nu\alpha\pi\tau}^{\chi\alpha\lambda} \leq \frac{90*10^{-1}*248.094,683}{20*(40-30,303)} \Rightarrow M_{\alpha\nu\alpha\lambda}^{\chi\alpha\lambda} \leq 11.513\text{kNcm}=115,131\text{kNm}$

Άρα η μέγιστη καμπτική ροπή που μπορεί να καταπονήσει την διατομή είναι:

$M_{\epsilon\pi\iota\tau\rho}=\min[40,936, \quad 115,131]=40,936\text{kNm}$

ΘΕΜΑ4ο-ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ-16/12/2011-ΠΟΛ.ΜΗΧΑΝΙΚΟΙ-Ε.Μ.Π.-ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ

Δίνεται η πακτωμένη δοκός ΑΒ η οποία συγκρατείται με το καλώδιο ΟΒ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστούν:



α. Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής της δοκού

β. Η τάση (δύναμης) που αναπτύσσεται στο καλώδιο ΟΒ. Η δοκός έχει ροπή αδράνειας $I=(A)L^2\sqrt{3}$, όπου (Α) είναι το εμβαδόν της διατομής του καλωδίου. Το μέτρο ελαστικότητας της δοκού και του καλωδίου είναι : Ε.

Λύση:

α. , β. Ο φορέας είναι μια φορά υπερστατικός. Άρα μαζί με τις τρεις εξισώσεις ισορροπίας μου χρειάζεται μια επιπλέον για να βρω όλες τις αντιδράσεις στη θέση Α και την τάση του καλωδίου ΟΒ. Η επιπλέον εξίσωση θα βγει με την βοήθεια της ελαστικής γραμμής.

Υπενθυμίζεται ότι το καλώδιο μπορεί να αναλάβει μόνο εφελκυστική δύναμη.

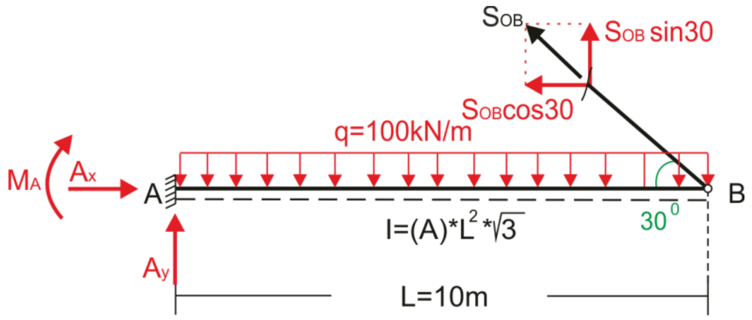
ΕΞΙΣΩΣΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0{,}866 S_{OB}$ (1)

$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y=1000-0{,}5 S_{OB}$ (2)

$\Sigma M_A=0 \Rightarrow M_A-S_{OB}\sin 30*10+1000*5=0 \Rightarrow$

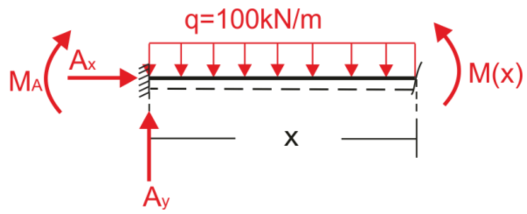
$\Rightarrow M_A=5S_{OB}-5000$ (3)



ΕΥΡΕΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

Δεν απαιτείται η χρήση γενικευμένης συνάρτησης. Κάνοντας Δ.Ε.Σ. από το άκρο Α σε τυχαία θέση x η ροπή κάμψης θα δίνεται από την σχέση:

$\Sigma M=0 \Rightarrow M(x)=-50x^2+A_y x+M_A$ με $0 \le x \le 10$



Η εξίσωση της ελαστικής γραμμής δίνεται από την σχέση:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=-\frac{M(x)}{EI}$$

Ολοκληρώνω την παραπάνω σχέση 2 φορές:

- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{EI}[50\frac{x^3}{3}-A_y\frac{x^2}{2}-M_Ax+C_1]$ (εξ.κλίσης ελ.γραμμής)
- $y(x)=\frac{1}{EI}[50\frac{x^4}{12}-A_y\frac{x^3}{6}-M_A\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2]\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x)=\frac{1}{EI}[4{,}167x^4-0{,}167A_yx^3-0{,}5x^2M_A+C_1x+C_2]$ (εξ. ελαστικής γραμμής)

<u>ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ</u>

- $\frac{dy}{dx}|_{x=A}=0\Rightarrow\frac{dy(x=0)}{dx}=0\Rightarrow C_1=0$
- $y(x=A)=0\Rightarrow y(x=0)=0\Rightarrow C_2=0$
- $y(x=B)=\frac{\Delta l_{OB}}{\eta\mu 30}\Rightarrow y(x=10)=2\Delta l_{OB}\Rightarrow\frac{1}{EI}[4{,}167*10^4-0{,}167*10^3A_y-0{,}5*10^2M_A]=2{,}0\frac{S_{OB}l_{OB}}{EA}\Rightarrow$

$\Rightarrow 416{,}7-1{,}67A_y-0{,}5M_A=40S_{OB}$ (4)

Οι (1) ÷ (4) μας κάνουν 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους.

Η (4) $\xRightarrow{(2),(3)}$ $416{,}7-1{,}67(1000-0{,}5S_{OB})-0{,}5(5S_{OB}-5000)=40S_{OB}\Rightarrow S_{OB}=29{,}92kN$ (το καλώδιο εφελκύεται άρα είναι σωστή η υπόθεση μου).

Βρίσκω ακόμη: $A_y=1000-0{,}5*29{,}92\Rightarrow A_y=985{,}04kN$

$M_A=5*29{,}92-5000\Rightarrow M_A=-4850{,}04kN$

Τελικά η εξίσωση της ελ.γραμμής θα είναι:

$y(x)=\frac{1}{EI}[4{,}167x^2-164{,}501x^3+2425{,}02x^2]$ με $0\leq x\leq 10m$