

Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ - ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Τ.Ε. - ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΙΙ

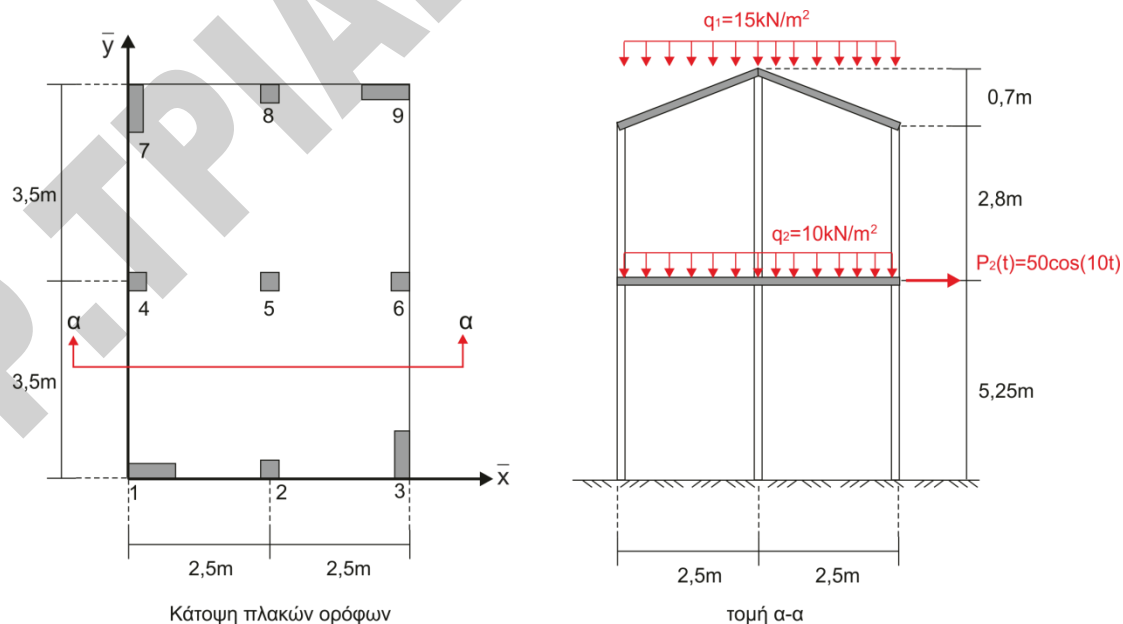
22/06/2012

ΘΕΜΑ

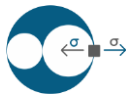
Της κατασκευής του σχήματος 1 ζητείται:

- Να υπολογισθεί το μητρώο μάζας.
- Να υπολογισθεί το μητρώο ακαμψίας.
- Να διατυπωθεί η εξίσωση κινήσεως.
- Να υπολογισθούν οι ιδιοσυχνότητες.
- Να υπολογισθούν και να σχεδιασθούν οι ιδιομορφές.

Για τους στύλους γίνεται η παραδοχή των συγκεντρωμένων μαζών, δηλαδή η μάζα τους θεωρείται συγκεντρωμένη στα δυο άκρα τους. Οι πλάκες θεωρούνται άκαμπτες. Το υλικό της κατασκευής είναι οπλισμένο σκυρόδεμα με ειδικό βάρος $\gamma=25\text{kN/m}^3$ και μέτρο ελαστικότητας $E=33000\text{MPa}$. Το συνολικό φορτίο των πλακών (μόνιμο και κινητό) είναι $q_1=15\text{kN/m}^2$ και $q_2=10\text{kN/m}^2$. Η δύναμη $P_2(t)=50\cos(10t)$ ασκείται μόνο κατά τον άξονα \bar{x} . Οι διατομές των στύλων 2,4,5,6,8 είναι $30\times 30\text{cm}^2$, των 1,9 είναι $50\times 30\text{cm}^2$ ενώ των 3,7 είναι $30\times 50\text{cm}^2$. Η επιτάχυνση της βαρύτητας δίδεται $g=9.81\text{m/sec}^2$. Οι στύλοι θεωρούνται πακτωμένοι στο έδαφος.



Σχήμα 1



Λύση:

a) Βρίσκω την μάζα της οροφής του 1ου ορόφου (m_1):

- Από πλάκα:

$$B_{\text{ΠΛ}} = q_1 E_{\text{ΚΑΤΟΨΗΣ}} \Rightarrow B_{\text{ΠΛ}} = 15[(2,5+2,5) \cdot (3,5+3,5)] = 525 \text{ kN}$$

$$\text{Άρα } m_{\text{ΠΛ}} = \frac{B_{\text{ΠΛ}}}{g} = \frac{525}{9,81} \Rightarrow m_{\text{ΠΛ}} = 53,517 \text{ ton}$$

- Από υποστυλώματα:

$$B_{\text{ΥΠ}} = \frac{[(4 \cdot 0,50 \cdot 0,30 + 2 \cdot 0,30 \cdot 0,30) \cdot 2,80 + (3 \cdot 0,30 \cdot 0,30) \cdot (2,8 + 0,70)] \cdot 25}{2} \Rightarrow B_{\text{ΥΠ}} = 39,113 \text{ kN}$$

$$\text{Άρα } m_{\text{ΥΠ}} = \frac{B_{\text{ΥΠ}}}{g} = \frac{39,113}{9,81} = 3,987 \text{ ton}$$

$$\text{Τελικά } m_1 = m_{\text{ΠΛ}} + m_{\text{ΥΠ}} = 53,517 + 3,987 \Rightarrow m_1 = 57,504 \text{ ton}$$

Βρίσκω την μάζα της οροφής του ισογείου (m_2):

- Από πλάκα:

$$B_{\text{ΠΛ}} = q_2 E_{\text{ΚΑΤΟΨΗΣ}} \Rightarrow B_{\text{ΠΛ}} = 10[(2,5+2,5) \cdot (3,5+3,5)] = 350 \text{ kN}$$

$$\text{Άρα } m_{\text{ΠΛ}} = \frac{B_{\text{ΠΛ}}}{g} = \frac{350}{9,81} \Rightarrow m_{\text{ΠΛ}} = 35,678 \text{ ton}$$

- Από υποστυλώματα:

$$B_{\text{ΥΠ}} = \frac{[(4 \cdot 0,50 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,30 \cdot 0,30) \cdot 5,25 \cdot 25]}{2} + 39,113 \Rightarrow B_{\text{ΥΠ}} = 108,02 \text{ kN}$$

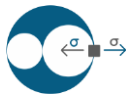
$$\text{Άρα } m_{\text{ΥΠ}} = \frac{B_{\text{ΥΠ}}}{g} = \frac{108,02}{9,81} \Rightarrow m_{\text{ΥΠ}} = 11,011 \text{ ton}$$

$$\text{Τελικά } m_2 = m_{\text{ΠΛ}} + m_{\text{ΥΠ}} = 35,678 + 11,011 \Rightarrow m_2 = 46,689 \text{ ton}$$

Οπότε το μητρώο μάζας της κατασκευής θα είναι:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57,504 & 0 \\ 0 & 46,689 \end{bmatrix} \text{ ton}$$





b) Κάθε υποστύλωμα συμπεριφέρεται σαν αμφίπακτο στοιχείο αφού:

- 1) Οι πλάκες είναι άκαμπτες ($EI \rightarrow \infty$) και
- 2) Οι στύλοι βάση της εκφώνησης είναι πακτωμένοι στο έδαφος.

Η δυσκαμψία κάθε υποστυλώματος με βάση τα παραπάνω δίνεται από την σχέση:

$$K_i = \frac{12EI}{h^3}$$

ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ ΙΣΟΓΕΙΟΥ $K_i^{(2)}$:

- Υποστυλώματα (1),(9): $K_1^{(2)} = K_9^{(2)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,30}{5,25^3} = 8.552 \text{ kN/m}$

- Υποστυλώματα (3),(7): $K_3^{(2)} = K_7^{(2)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,30^3}{5,25^3} = 3.078,72 \text{ kN/m}$

- Υποστυλώματα (2),(4),(5),(6),(8):

$$K_2^{(2)} = K_4^{(2)} = K_5^{(2)} = K_6^{(2)} = K_8^{(2)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,3^4}{5,25^3} = 1.847,23 \text{ kN/m}$$

ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑΤΑ ΟΡΟΦΟΥ $K_i^{(1)}$:

- Υποστυλώματα (1),(9): $K_1^{(1)} = K_9^{(1)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,30}{2,8^3} = 56.373 \text{ kN/m}$

- Υποστυλώματα (3),(7): $K_3^{(1)} = K_7^{(1)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,30^3}{2,8^3} = 20.294,28 \text{ kN/m}$

- Υποστυλώματα (4),(6): $K_4^{(1)} = K_6^{(1)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,3^4}{2,8^3} = 12.176,57 \text{ kN/m}$

- Υποστυλώματα (2),(5),(8): $K_2^{(1)} = K_5^{(1)} = K_8^{(1)} = \frac{12 \cdot 33.000 \cdot 10^3 \cdot 0,3^4}{3,5^3} = 6.234,40 \text{ kN/m}$

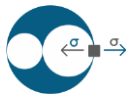
Το μητρώο δυσκαμψίας του διόροφου πλαισίου θα δίνεται:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 K_i^{(1)} & -\sum_{i=1}^9 K_i^{(1)} \\ -\sum_{i=1}^9 K_i^{(1)} & \sum_{i=1}^9 K_i^{(1)} + \sum_{i=1}^9 K_i^{(2)} \end{bmatrix}$$

- $K_{11} = K_1^{(1)} + K_2^{(1)} + \dots + K_9^{(1)} = 2 \cdot 56.373 + 2 \cdot 20.294,28 + 2 \cdot 12.176,57 + 3 \cdot 6.234,40 = 196.390,90 \text{ kN/m}$

- $K_{22} = K_{11} + K_1^{(2)} + K_2^{(2)} + \dots + K_9^{(2)} = 196.390,90 + 2 \cdot 8.552,0 + 2 \cdot 3078,72 + 5 \cdot 1847,23 = 228.888,49 \text{ kN/m}$





Το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής θα είναι:

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} 196.390,90 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888,49 \end{bmatrix} \text{ kN/m}$$

c) ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ:

$$\begin{bmatrix} 57,504 & 0 \\ 0 & 46,689 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 196.390,90 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888,49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50\cos(10t) \end{bmatrix}$$

d) Οι ιδιοσυχνότητες της κατασκευής υπολογίζονται από τον μηδενισμό της ορίζουσας:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 196.390,90 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888,49 \end{vmatrix} - \omega^2 \begin{vmatrix} 57,504 & 0 \\ 0 & 46,689 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 196.390,90 - \omega^2 57,504 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888,49 - \omega^2 46,689 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (196.390,90 - 57,504\omega^2)(228.888,49 - 46,689\omega^2) - (-196.390,90)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.684,8\omega^4 - 22.331.298,46\omega^2 + 0,63822 \cdot 10^{10} = 0 \quad \textcircled{1}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι διτετράγωνη οπότε: θέτω $\omega^2 = x$ και η $\textcircled{1}$ γίνεται:

$$2.684,8x^2 - 22.331.298,46x + 0,63822 \cdot 10^{10} = 0 \Rightarrow x_2 = 8021,32$$

$$x_1 = 296,355$$

Οι κυκλικές ιδιοσυχνότητες θα είναι:

$$\omega_1 = \sqrt{296,355} \Rightarrow \omega_1 = 17,215 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_2 = \sqrt{8021,32} \Rightarrow \omega_2 = 89,56 \text{ rad/sec}$$

Θεμελιώδης ιδιοσυχνότητα είναι η μικρότερη από τις δύο δηλαδή ή $\omega_1 = 17,215 \text{ rad/sec}$



ε) Ακολουθεί ο υπολογισμός και ο σχεδιασμός των ιδιομορφών $[\varphi]$ του συστήματος:

Για την πρώτη (θεμελιώδη) ιδιοσυχνότητα $\omega_1=17,215\text{rad/sec}$

$$\begin{bmatrix} 196.390-\omega_1^2 57,504 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888 - 46,689\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_1=17,215}$$

$$\Rightarrow -196.390,90 - 1 + (228.888 - 46,689 \cdot 17,215^2) \beta_2^{(1)} = 0 \Rightarrow -196.390,90 + 215.051,42 \beta_2^{(1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_2^{(1)} = 0,9132$$

Για την δεύτερη ιδιοσυχνότητα $\omega_2=89,56\text{rad/sec}$

$$\begin{bmatrix} 196.390-\omega_2^2 57,504 & -196.390,90 \\ -196.390,90 & 228.888 - 46,689\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\omega_2=89,56}$$

$$\Rightarrow -196.390,90 - 1 + (228.888 - 46,689 \cdot 89,56^2) \beta_2^{(2)} = 0 \Rightarrow -196.390,90 - 145.771,448 \beta_2^{(2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_2^{(2)} = -1,347$$

Άρα το μητρώο $[\beta_{ij}]$ των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$\beta = \begin{bmatrix} 1,0 & 1,0 \\ 0,9132 & -1,347 \end{bmatrix}$$

Διαιρώντας κάθε στήλη του μητρώου με το μέγιστο κατά απόλυτο τιμή στοιχείο της, θα έχω:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1,0 & -0,7423 \\ 0,9132 & 1,0 \end{bmatrix}$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να σχεδιάσουμε τις δυο ιδιομορφές του συστήματος μας.

